

Eksamens

Emnekode: MA-218
Emnenavn: Lineær algebra

Dato: 2. desember 2015
 Varighet: 9.00 - 14.00

Antall sider: 3

Tillatte hjelpeemidler: Kun skrivesaker

Merknader: Alle deloppgavene teller i utgangspunktet likt
 Engelsk-norsk ordliste i lineær algebra er vedlagt.

Merk: I oppgavesettet brukes følgende notasjon, om hverandre, for en vektor i \mathbb{R}^n :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{og } (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Oppgave 1 (Litt av hvert)

La $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ og $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- a) Finn nullrommet til A .
- b) Ligger b i kolonnerommet til A ?
- c) La $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være transformasjonen som speiler vektorer i \mathbb{R}^2 om linja gitt ved $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisa til S .
- d) La B være en 3×7 matrise, og la $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ være definert ved $T(x) = Bx$.
 Finn m og n , og avgjør om T er 1-1.
 Finn dimensjonen til nullrommet til B når T er onto \mathbb{R}^n .

La P være matrisa som projiserer vektorer $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ned på vektorer i planet $\pi = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_2 + y_3 = 0\}$ med samme x_1 og x_2 koordinater som v .

- e) Finn tre uavhengige egenvektorer til P samt de tilhørende egenverdiene til disse egenvektorene.
- f) Finn matrisa P .
- g) Forklar hva som menes med en *basis* for et endelig-dimensjonalt vektorrom V .

- h) La $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ hvor $c \in \mathbb{R}$. Finn en basis for kolonnerommet og en basis for radrommet til C .

Oppgave 2 (Underrom og basisskifte)

- a) La V være et vektorrom og U en delmengde av V . Hvilke kriterier må være oppfylt for at U skal være et underrom av V ?
- b) Avgjør om delmengdene under er underrom:
- $M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = |x_1|\}$.
 - $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 = x_3\}$.
 - $M_3 = \{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\}$ hvor $M_{2 \times 2}$ er vektorrommet av alle 2×2 matriser.
- La $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ og $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ hvor
- $$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
- c) Forklar hvorfor \mathcal{B} og \mathcal{C} begge er basiser for \mathbb{R}^2 .
- d) Finn matrisa $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ som skifter basis fra \mathcal{B} til \mathcal{C} .
- e) Gitt vektoren $[u]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (dvs. vektoren u koordinatisert mhp. \mathcal{C}). Finn $[u]_{\mathcal{B}}$.

Oppgave 3 (Determinanter)

- a) Gitt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

For hvilke $c \in \mathbb{R}$ er A invertibel?

- b) Anta at matrisa B er radekvivalent til matrisa

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hva kan du da si om $\det(B)$?

Gitt punktene $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-1, 3)$ og $P_3 = (4, 3)$ i \mathbb{R}^2 .

- c) Hva er arealet til trekanten $\triangle P_1 P_2 P_3$?

- d) La $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved at

$$T(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - 3x_2).$$

Finn arealet til området $T(\triangle P_1 P_2 P_3)$. (Hvis du ikke har svart på b), kan du bruke at arealet til $\triangle P_1 P_2 P_3$ er 2 selv om det ikke er riktig svar.)

Oppgave 4 (Redusert trappematrise og radrom)

- a) La A være en 5×4 matrise, og anta at løsningsmengden til matriselikningen $Ax = 0$ er utspent av vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn den reduserte trappematrisa R_A til A .

$$\text{Avgjør om vektoren } e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ligger i radrommet til } A.$$

Trond A. Abrahamsen

Engelsk - norsk ordliste i Lineær algebra

Oppdatert: 02.12.2009

A

A matrix in echelon form – Trappematrise
Algebraic multiplicity – Algebraisk multiplisitet
Attractor – Attraktor
Augmented matrix – Totalmatrise

B

Basic variable – Ledende ukjent

C

Change of basis - Basisskifte
Change-of-coordinates matrix – Koordinatskiftematrise (Basisskiftematrise)
Change of variable - Variableskifte
Characteristic equation – Karakteristisk likning
Characteristic polynomial – Karakteristisk polynom
Codomain – Verdiområde
Coefficient matrix – Koeffisient matrise
Cofactor expansion – Kofaktorutvidelse
Column – Kolonne
Column space – Kolonnerom
Composition - Sammensetning
Commute – Kommutere
Continuous dynamical system – Kontinuerlig dynamisk system
Contraction – Kontraksjon (Forminsking)
Coordinate mapping – Koordinatavbildning(transformasjon)
Cross-product term - Kryssproduktledd

D

Decouple – Dekople
Diagonalizable – Diagonaliserbar
Differential equation – Differensielllikning
Dilation – Dilatasjon (Forstørring)
Discrete dynamical system – Diskret dynamisk system
Distinct – Distinkt (Forskjellig fra)
Domain – Definisjonsmengde
Dot product - Prikkprodukt
Dynamical system – Dynamisk system

E

Echelon form – Trappeform
Eigenfunctions - Egenfunksjoner
Eigenvalue – Egenverdi
Eigenspace – Egenrom

Eigenvector – Egenvektor

Eigenvector decomposition – Egenvektordekomposisjon

Elementary matrix – Elementær matrise

Equation – Likning

Evolution – Utvikling

F

Finite dimensional vectorspace – Endelig dimensjonalt vektorrom

Free variable – Fri variabel

Fundamental set of solution – Fundamental løsningsmengde

G

General solution – Generell løsning

Geometrical multiplicity – Geometrisk multiplisitet

H

Homogeneous linear equation – Homogen lineær likning

I

Image (of x) – Bilde (av x)

Infinite dimensional vectorspace – Uendelig dimensjonalt vektorrom

Inhomogeneous linear equation – Innhomogen lineær likning

Initial value problem – Initialverdiproblem

Inner product – Indreprodukt (Prikkprodukt)

Isomorphism – Isomorfi

L

Leading entry – Lederelement

Leading 1 – Lederener

Linear combination – Lineær kombinasjon

Linear (in)dependence – Lineær (u)avhengighet

Linear transformation – Lineær transformasjon

M

Mapping - Avbildning

Matrix – Matrise

Matrix composition – Matrise sammensetning

Matrix equation – Matriselikning

Matrix of the quadratic form – Matrisen til en kvadratisk form

Matrix-Vector product – Matrise – vektorprodukt

Matrix transformation – Matrisetransformasjon

N

Nontrivial solution – Ikke-triviell løsning
Norm – Norm (Lengde)
Normalizing – Normalisere
Null space – Nullrom
Nullity – Nulliteten (Dimensjonen til nullrommet)

O

One-to-one – Injektiv (en – til – en)
Orthogonal – Ortogonal (Vinkelrett på)
Orthogonal complement – Ortogonalkomplement
Orthogonally diagonalizable – Ortogonalt diagonalisert
Orthogonal matrix – Ortogonal matrise
Orthogonal projection – Ortogonalprojeksjon
Orthogonal set - Ortogonal mengde
Orthonormal set – Ortonormal mengde

P

Pivot – Pivot (Lederelementene i en trappematrise)
Power – Potens
Principial axes – Prinsipalakser
Projection matrix - Projeksjonsmatrise

Q

Quadratic form – Kvadratisk form

R

Range – Verdimengde
Rank – Rang
Reduced echelon form – Redusert trappeform
Repellor - Avviser
Row – Rad
Row reduction – Radreduksjon
Row space – Radrom

S

Saddle point – Sadelpunkt
Scalar – Skalar (reelt eller kompleks tall)
Similarity transformation – Similær transformasjon
Singular matrix – Matrise som ikke er invertibel
Soulution set - Løsningsmengde
Span – Lineært span
Spectral decomposition - Spektraldekomposisjon
Square matrix – Kvadratisk matrise

Standard matrix – Standardmatrise
Subset - Delmengde
Subspace – Underrom (Delrom)
Surjective (onto) – Surjektiv (på)
Symmetric matrix – Symmetrisk matrise

T

Trajectory – Bane (Trajektorie)
Transformation – Transformasjon (funksjon)
Translation – Forflytning (Translasjon)
Transpose - Transponert
Trivial solution – Triviell løsning
Triangular matrix – Triangulær matrise

U

Unit vector – Enhetsvektor

V

Vector equation – Vektorlikning
Vectorspace – Vektorrom

Z

Zero matrix – Nullmatrise
Zero subspace – Underrommet som består bare av nullvektoren
Zero vector – Nullvektor